F E U I L L E S   V O L A N T E S
catalogue sur demande
Les prismes 234 av Mal Leclerc 34000 Montpellier (67) 92 32 04
Feuille DH auteur Roger Chartier

Les combi...(naisons) de la Combinatorique

A DE QUOI S'AGIT-IL ?

Ne serait-ce qu'en Logique Décisionnelle, celle de tous les jours, et sans même parler pour l'instant de supputation des Probabilités, on a sans cesse besoin de pouvoir établir, le nombre MAXIMUM possible :

- d'échantillons en puissance, dans un lot de fabrications,
- de "systèmes" de plaçage
  - d'invités à table, au spectacle
  - de voyageurs (en autocar)
- de "mains" (cartes données au bridge,....)
- de cocardes d'avion, avec un choix de n couleurs,
- d'arrivées (avec ou sans ordre) au tiercé hippique

Il en est de même des fameux coefficients du binôme de Newton, que l'on verra plus loin .

B POSE DU PROBLEME

Soit une course de 5 chevaux, tous supposés à "chances" égales.
La première place peut donc être obtenue par l'un quelconque des cinq : A, B, C, D ou E. Dès que le gagnant a franchi le poteau d'arrivée, la lutte pour la deuxième place n'est plus circonscrite qu'entre les quatre restants.

Il y a donc 20 cas possibles (5x4) pour deux choix (commençant à 5)

1ère place	A	B	C	D	E
2ème place	B,C,D,E	A,C,D,E	A,B,D,E	A,B,C,E	A,B,C,D

De façon analogique on sera en présence de :

- 60 cas pour 3 places (les 20 ci-dessus multipliés par les 3 restants),
- 120 cas pour 4 places (les 60 ci-dessus multipliés par 2 avant derniers possibles).

A ce stade le "toquard" est connu ipso facto : il n'y a eu que 5-1 vrais choix, alias degrés de liberté de choix.

C

Pour les lecteurs familiers avec les arbres de raisonnement, on se bornera à rappeler :

```
                      C { D-E   ABCDE
                          E-D   ABCED
              B       D { C-E   ABDCE
                          E-C   ABDEC
                      E   ---   ---
                      puis 3  enfin 2
                      choix   choix
   A          C

              D
                                au total;
                                5×4×3×2
      5 choix                   = 120 réponses
 puis quatre choix  E             différentes
      initiaux
                             les dernières étant EDCAB
                             et EDCBA évidemment
```

Pour les autres, on les invitera à s'exercer à construire les 4 autres arbres à 24 cas, qui réunis au précédent donnent bien le détail des 120 cas annoncés (§ B).
La COMBINATORIQUE (alias analyse combinatoire, formé, on le voit, d'analyse algébrique) tend à donner le nombre de cas en s'évitant le fastidieux de les énumérer un par un. On se contente de savoir <u>combien</u> il y en a.

Autre exemple, avec détail celui-là.

Quels nombres de trois chiffres peut-on écrire avec les chiffres 3,4 et 7 non réutilisés ? L'ordre joue donc.

Bien sûr en tâtonnant, on trouvera les six réponses possibles.
Bien sûr, un ordinateur, grâce à son programme (sa recette de cuisine), vous les écrira en moins d'une demi-seconde ! Entre ces deux extrêmes l'homme dispose de raisonnements astucieux (les algorithmes) pour y arriver avec son crayon. Ici on obtiendra :

347 374 437 473 734 743

Les mathématiciens étant des ..... peu courageux, cherchent toujours à abréger. On posera donc avec eux que la multiplication en "dégradé.

5 x 4 x 3 x 2 (x1) qui vaut 120
s'écrira 5 ! et se lira <u>factorielle</u> de 5.

Elle donne les 120 cas appelés ici <u>PERMUTATIONS</u> symbolisées P_5

Dans la pratique des courses on ne s'intéresse qu'aux trois places de tête : 60 cas comme vu au paragraphe B, car 5 x 4 x 3. On dit que ce sont des <u>ARRANGEMENTS</u> de 3 objets parmi 5.

On symbolise A_5^3 c'est une factorielle limitée à ses trois premiers facteurs à partir de 5.
Elle vaut encore $\dfrac{P_5}{(P_5-3)\,!}$

Bien évidemment $A_5^5 = P_5$.

Mais cette pratique s'intéresse aussi aux arrivées SANS ordre. Autrement dit qui des 5 sera dans les trois premiers , quelle que soit leur place dans ce trio ?

En réexaminant l'exposé de B, on constate que les 60 cas AVEC ORDRE s'amenuisent ici et que l'ordre a joué par le classement dans les trois places, sous la forme de factorielle de 3 3 ! soit 6.

Il ne reste donc que 60/6 cas d'arrivées en désordre. On les appelle <u>COMBINAISONS</u> de 3 parmi 5 et on écrit :

$$C_5^3 = A_5^3 \times \frac{1}{3!} = \frac{60}{6} = 10 = \frac{5\,!}{3!\,2\,!}$$

Remarquer au dénominateur la "dichotomie", la bissection du numérateur - tout étant en factorielles).

A titre complémentaire, on écrira en détail ci-après ces seuls ~~[illegible]~~ 10 cas possibles.

(A,B,C)	(A,B,D)	(B,C,D)		
(A,C,D)	(A,B,E)	(B,C,E)	et	(C,D,E)
(A,D,E)	(A,C,E)	(B,D,E)		

D

m La combinatorique générale admet les répétitions. Il y a donc complication .... ême si ce n'est pas très compliqué !

c Mais le présent schéma n'en parlera pas. Il se bornera à résumer sur les figures i-jointes, les pages et les pages que les manuels habituels y consacrent.

Tout tient dans deux questions, on l'a déjà entrevu :
- prend-on tout ? (si oui, on dit qu'il y a <u>exhaustivité</u>)
- l'ordre joue-t'il ?

La figure 1 résume les réponses. A noter

1) - que la réponse à ORDRE en premier est contraitement à l'usage NON (mnemo ... la nature se réfugie dans le désordre, l'entropie....),

2) - le signe ⌉ de la logique moderne, remplace une soustraction en signifiant qu'on prend le complément du plus petit au plus grand, E

3) - La première case - c'est remarquable - correspond à la définition de l'Ensemble de cette même logique moderne : TOUT EN VRAC (DANS UN MEME SAC SYMBOLISE PAR DES ~~PARENTHESES~~) ACCOLADES

4) - Cet ensemble est unique d'où le 1 de la petite case vers le centre. F
Les autres nombres du centre 6, 10, 60 sont les réponses données par les formules sur l'exemple choisi (mettons trois doigts parmi cinq)

$$P_3 = 3! = 3\times2\ (\times1) = 6$$

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5\times4\times3\times2}{2} = 5\times4\times3 = 60$$

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!1!} \quad \frac{5!}{3!2!} = 10 \quad \text{Le vérifier}$$

G

5) Mnémo : a) on trouve en diagonale (les voyelles E,A
(les consonnes C,P

b) A = CxP (tel avis de changement de position)

6) C_m^p forme générale où p est le petit, décrit

$\binom{m}{p}$ en anglo-saxon avec inversion des lettres — I_m^p quand on le traite sous l'aspect "injection" de la logique moderne

7) L'emploi du ⌉ (cf § 2) fait ressortir immédiatement le "cousinage" de C et de A.

8) On peut remarquer aussi que les A sont donnés (§ 4) par le produit des p facteurs débutant à m.

D'où aussi l'écriture : $A = m^{p!}$ p dans le point d'exclamation

9) Des tables de C existent. Difficiles à calculer (et à mettre en oeuvre) les C sont vite remplacées par des approximations utilisant des travaux de sterling. Enfin les calculettes récentes .... Mais on peut les trouver aussi grâce au triangle de Pascal (figure 2).

<u>Triangle de Pascal</u> (figure 2).

Il se construit de façon enfantine si on lui donne une forme de hutte.

1) premier stade : on écrit suivant les "pentes" des suites de 1 puis deux suites de $\mathbb{N}$ (1,2,3,4,5 ....).

2) deuxième stade : on trouve les autres nombres par ADDITION de leurs NORD-OUEST et NORD-EST (c'était déjà vrai d'ailleurs pour le premier stade...).

3) Une raison - criante - de symétrie permet d'écarter la construction à droite de la colonne centrale,

4) Quand on a arrêté cette construction, on numérote les lignes et les colonnes. MAIS ATTENTION, en commençant par ZERO ! et pour les colonnes on ne numérotant que de façon adjacente aux nombres écrits sur la dernière ligne,

5) Exemple : C_5^3 se lit 10.... comme il l'a été calculé précédemment.

6) C_5^2 aussi d'ailleurs. Oui et tous les manuels soulignent la ~~fameuse~~ fameuse symétrie ci-dessus $C_m^p = C_m^{m-p}$ ici $C_5^3 = C_5^{5-3}$

7) C_5^0 (qui vaut aussi C_5^5 d'après le paragraphe précédent vaut 1; car il n'y a (logique moderne):
   - qu'<u>une</u> partie vide (aucun élément parmi 5)
   - d'<u>une</u> partie pleine (cinq éléments non classés parmi cinq).

On vérifie ainsi que : $A_5^5 = \frac{5!}{5!} = 1$

Or C_5^5 c'est aussi A_5^5 divisé par $0!$ (revoir § 6)

$$C_5^5 = \frac{5!}{5!\,0!} = 1$$

ce qui suppose $0! = 1$ (ce qui se démontre à un niveau supérieur , tout comme $a^0 = 1$).

Retenir que le zéro "affecté" d'autre chose, n'appelle pas obligatoirement la nullité.

BINOME DE NEWTON $(a+b)^n = \ ?$

Extrêmement usuel, on aura intérêt à retenir qu'il vaut :

$$(a+b)^n = \sum_0 a^i . b^{\rceil} C_n^i$$

parce que :

1) formé de la somme $\sum$ des monômes en a b C
2) i étant toutes valeurs de $\mathbb{N}$ entre zéro compris et n (compris),
3) $\rceil$ étant le complément de i à n donc, n-i
4) C la combinaison trouvée dans les paragraphes précédents.

On a donc par exemple,

$$(m+q)^5 = q^5 + 5mq^4 + 10\, m^2q^3$$
$$+ m^5 + 5m^4q + 10\, m^3q^2$$

Car au brouillon, on a pu écrire :

$$= m^0 q^{(5-0)}\ C_5^0 + m^1 q^{(5-1)}\ C_5^1 + \dots\dots$$

COMMENTAIRES (finaux) sur NEXTON.

1) Il y a n+1 monômes à trouver pour le développement,

2) Ils ont une symétrie "croisée" entre coefficients et exposants. Donc établir la première moitié d'entre eux suffit à faire découvrir les autres.

3) le cas a = b = 1 (tous les deux) amène le résultat remarquable suivant :

$$(1+1)^n \text{ alias } 2^n = \sum C$$

Effectivement pour n = 5 on a :

$2^5 = 32$ = 2 fois (1+5+10) les coefficients lus dans Pascal.
Cela peut servir de contrôle pour le numérotage lignes et colonnes de ce Pascal (comme il a été dit en § K,4)! le 5 exposant est le numéro de la ligne où se trouvent les C cherchés qui sont au nombre de 5+1 (revoir A,1).

QUELQUES APPLICATIONS

a) 30 pièces produites autorisent C_{30}^5 échantillons différents de cinq exemplaires. La réponse est déjà 142.506 types d'échantillons! Pour ces échantillons de 15 on dépasserait 155 millions de choix !
b) de même 10 ! vaut 3.628.800. On saisit la croissance de ces grandeurs !
c) Tiercé. 3 chevaux dans l'ordre sur 20, donnent 6.840 cas. Si le désordre suffit, on a 6.840 divisé par 3 ! soit 6, donc 1.140.

On peut visualiser certaines formules, cf figure 3.

- o -

L'ORDRE JOUE-T-IL? \ EXHAUSTIVITÉ? (PREND-ON TOUT?)	OUI	NON
NON	ENSEMBLE $\{E\}$	$C_5^3 = \frac{5!}{3!\,7!}$
OUI	$P_3 = 3!$	$A_5^3 = \frac{5!}{7!}$

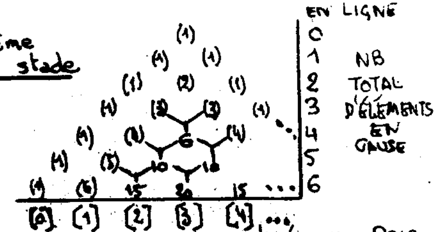
1	10
6	60

fig 1

1^er stade

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 4 1
1 5 5 1
6

2ème stade



COLONNES DU NB D'ÉLÉMENTS PRIS

ex: $C_6^2 = 15 \ (= C_6^4)$

fig 2 TRIANGLE DE PASCAL

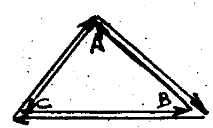


fig 3

VISUALISATION de $P_3 = 6$ (car $3!$)

Il y a ici
- 3 points de départ possibles
- 2 sens de parcours

donc les 6 $\begin{cases} \text{ABC BCA CAB} \\ \text{ACB CBA BAC} \end{cases}$