

Les Primes, 234 av. Mal-Leclerc 34000 Montpellier
Tél (67) 92 32 04

Auteur: Nicolas de Vallière

Formes de la nature: gouttes et bulles.

Le "corpus" des formes naturelles est certes très vaste, mais ce n'est pas un chaos: on peut en entreprendre la classification - ce que font, sous leur aspect "descriptif", nombre de sciences comme la botanique, la géologie, l'astronomie, la rétrologie, etc... Qu'une telle entreprise soit seulement possible indique déjà une certaine simplicité sous-jacente à la diversité des phénomènes, vraisemblablement liée au fait que les formes se laissent décomposer en certains archétypes, en nombre relativement faible, dont l'universalité résulte de contraintes géométrico-topologiques imposées à la morphologie. En d'autres termes, les formes possibles sont solutions de certains problèmes mathématiques, ce qui rend leur étude accessible à l'esprit humain.

Il est des cas toutefois où la "mathématisation" est globale - et pas seulement locale, au niveau des accidents ou microformes élémentaires dont se compose un objet complexe (comme un caillou formé de cristaux imbriqués de façon aléatoire) - la forme présentant alors un aspect relativement simple dans son ensemble. On songera par exemple aux quasi-sphères que sont les étoiles et les planètes, à la géométrie rigoureuse des cristaux (née des propriétés toujours identiques des atomes qui les composent - ce qui n'interdit pas les variations sur le thème de base, de même que les gènes communs à une espèce s'expriment en des individus tous différents) ... et aux gouttes et bulles qui nous occuperont ici.

Leur forme résulte de l'interaction de deux grandeurs: la pression et la tension superficielle, qui doivent s'équilibrer en tout point de leur surface. On en aura une image claire en découpant par la pensée un disque infinitésimal D dans ladite surface (fig. 1), qui subira la poussée P et ne sera retenu que par la tension superficielle γ s'exerçant sur son bord.

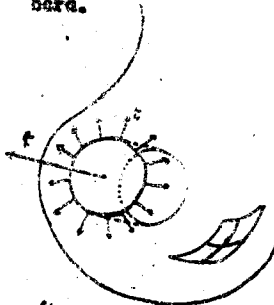


fig. 1

Exprimant mathématiquement cette égalité des forces en présence (pression $\times$ surface - - somme des tensions par élément de longueur du bord de D) on est conduit à une équation aux dérivées partielles décrivant la surface. Mais cette équation admet également une interprétation purement géométrique.

Ce qui nécessite quelques concepts de géométrie différentielle: les surfaces lisses S peuvent être décrites localement, au voisinage d'un point M , par les deux courbures (inverses des rayons de courbure) de leur intersection en M avec un dièdre Δ de plans orthogonaux d'arête normale à la surface (fig. 2) - et il se trouve alors que la moyenne arithmétique (ou la somme) de ces courbures ne dépend pas du dièdre choisi! S'est donc un nombre qui ne dépend que de l'aspect de la surface au voisinage du point M , et qu'on appelle évidemment la "courbure moyenne".

L'interprétation géométrique annoncée est alors la suivante: la surface d'une bulle ou d'une goutte présente en chaque point une courbure moyenne égale (à un facteur multiplicatif près, découlant des unités physiques utilisées pour exprimer la pression et la tension superficielle) à la pression (au signe près).

Considérons d'abord les bulles: l'action de la gravitation sur l'air qui les gonfle est négligeable, la pression se trouve donc être la même partout.

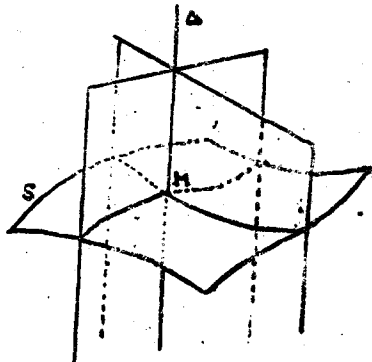


fig. 2

Aussi leur courbure moyenne est elle constante tout "au long" de leur surface. Un cas se présente immédiatement à l'esprit: la sphère partout identique à elle-même (ce qui ne saurait surprendre ceux qui se sont amusés avec de l'eau savonneuse!).

Le plan, qui n'est qu'une sphère de rayon infiniment grand, se rencontre également dans la pratique: il suffit d'accrocher deux bulles de façon à ce que les pressions sur l'interface, qui sera plane (pression nulle - courbure moyenne nulle ce qui sied assez bien à un plan) (Fig:3). On aurait pu également l'obtenir en trempant un cadre rectangulaire dans de l'eau additionnée d'agent mouillant et en le retirant de telle sorte qu'une membrane se forme. Mais, voici que surgit un problème: si nous déformons légèrement le cadre

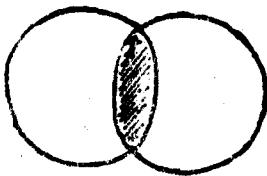


fig. 3

(Fig:4), la bulle cesse d'être plane, alors que les pressions s'équilibrent toujours de part et d'autre de sa surface - notre interprétation géométrique serait-elle en défaut?

Non, bien sûr: les deux courbures orthogonales sont en fait des quantités algébriques dotées d'un signe (conventionnel), par exemple positif "vers le haut" et négatif "vers le bas" (Fig:5).

La combinaison: "pression nulle - courbure moyenne nulle" peut donc se réaliser avec une des courbures négative et l'autre positive et opposée. Le lecteur aura reconnu le "selle de cheval" du genre paraboloides hyperboliques.

Mais il existe des bulles, ou plutôt des membranes, présentant des formes beaucoup plus compliquées. J'engage vivement à expérimenter à l'aide de petits cadres en fil de fer trempé au bout d'un fil (de coton celui-là) dans de l'eau savonneuse et doucement retirés du liquide, p. ex. fig 7, a à d (on devra parfois crever certaines parties de la membrane. Ne pas croire que les arêtes du cube e donnent toujours bêtement un cube...).



fig. 4

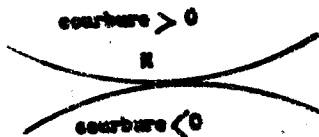
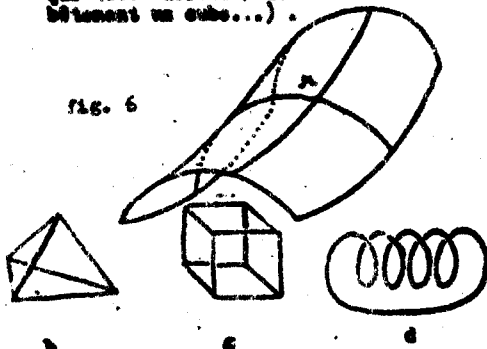


fig. 5

fig. 6



D'un point de vue mathématique ceci revient à imposer des "conditions aux limites" (= "sur les bords") à l'équation aux dérivées partielles décrivant la surface. Nos petits cadres représentent alors autant d'ordinateurs analogiques résolvant ces difficiles problèmes! On peut même y trouver un intérêt supplémentaire dans la mesure où nos bulles, ce qui a force de loi en physique, réalisent le minimum de l'énergie en présence- énergie qui se décompose en une portion stockée dans le gas sous pression et une autre dans l'énergie élastique de la membrane. Lorsque la bulle est ouverte, cette dernière intervient seule. Comme la tension superficielle, qui ne dépend que du liquide utilisé, est la même partout: ces membranes savonneuses réalisent la surface minimum écartant le contour donné.

On retrouve là le célèbre "problème de Plateau" - et le fait que les solutions sont de courbure moyenne nulle.



fig. 7

lequel le liquide mouille le support (penser à l'aspect différent que présentent les surfaces libres de l'eau et de mercure dans un récipient en verre).

On peut toutefois considérablement le simplifier en inclinant la surface d'adhérence un axe (vertical) de révolution - ce qui ramène l'équation aux dérivées partielles à une équation différentielle ordinaire ne comportant donc qu'une seule variable: la distance à l'axe. Qui plus est on peut alors classer les solutions par leur longueur (distance de la tête de la goutte au plan de référence) aux limites difficiles à manier. Des robinets présentant en général une extrémité circulaire, je ne pense pas que ce soit une restriction très grave.

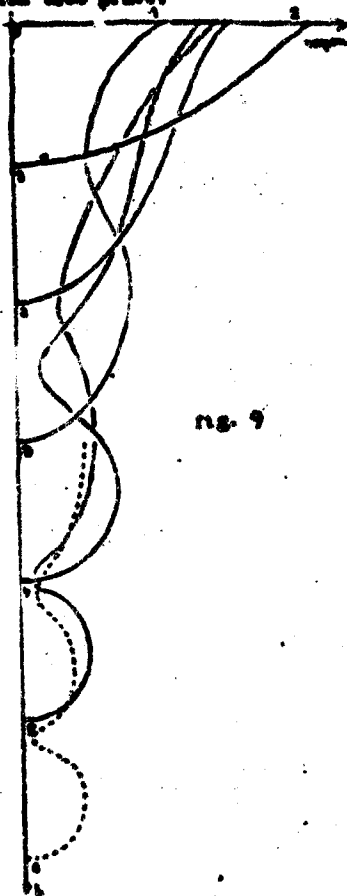


fig. 9

Venons en maintenant aux gouttes. Ici la pression en jeu n'est plus constante, mais dépend de la hauteur de la colonne de liquide se trouvant au-dessus de la portion infinitésimale que nous avons découpé dans la surface. C'est à dire qu'elle est proportionnelle à la distance h entre le disque h et le plan de référence P horizontal, plan des pressions nulles (Fig: 8).

Notre interprétation géométrique sera alors: courbure moyenne $\propto -h$ (via un bon choix d'unités pour la densité des liquides, l'accélération de la pesanteur, etc...).

Dans toute son horrible généralité le problème est assez difficile, les surfaces obtenues dépendant encore des conditions aux limites - en pratique de la forme du contour que l'on utilise pour suspendre la goutte et de l'angle sous

Le calcul numérique permet alors de tracer les génératrices (= traces de la goutte sur un plan vertical, son profil en quelque sorte) de ces gouttes sur un plan vertical, et ce pour diverses longueurs (fig:9). Le phénomène essentiel est que la goutte donne naissance, au fur et à mesure de son allongement, à des spirales reliées entre elles par des cols assez étroits. Notons en passant que la partie inférieure de la génératrice d'une goutte très longue se distingue fort peu de la courbe décrite par le foyer d'une ellipse roulant sur une droite...

Si l'apparition de la première spirale peut s'observer à l'aide d'un robinet, les suivantes ne se manifestent pas car la goutte se détache. Cette différence vis-à-vis du modèle mathématique résulte du fait que la tension superficielle ne l'est pas entièrement: lorsque le col devient très étroit la tension est modifiée et la goutte finit par se rompre. Il est alors amusant de constater quel modèle prévoit l'existence de "monstres": gouttes remplies d'un chapelet infini de spirales et nées comme ces limites, une goutte présentant une "singularité" sur l'axe (Fig:10)

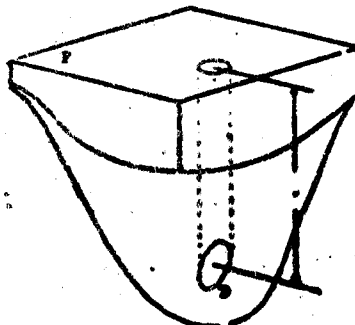


fig. 8

En nous tournant par contre vers des gouttes de longueur faible, et alors le modèle est excellent, la surface présente une génératrice ressemblant d'autant plus à une fonction de Bessel (fig:??) - ces fonctions aussi classiques que celles de la trigonométrie sont à peu près aussi inévitables dans la plupart des problèmes physiques à symétrie de révolution) qu'elle est plus plate (pression faible). Vous savez donc à présent quelle est la forme de la surface du liquide affleurant l'extrémité de votre robinet.

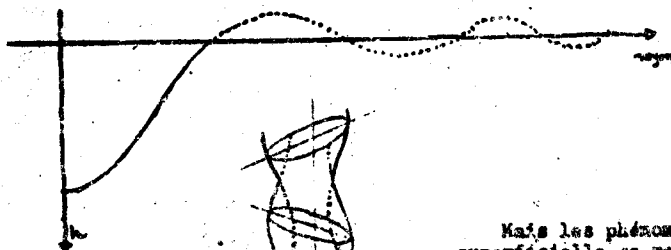


fig. 11

fig. 14

vague minuscule où la force de rappel n'est pas la gravitation, comme pour la boule ordinaire, mais bien la tension superficielle. Pour l'expérimentation en chambre il suffit de faire tomber un jet d'eau régulier dans un récipient plein: il se forme alors de bourrelets au-dessus de la zone de contact (fig. 13) - qui ne sont que la version stationnaire des rides précédentes.

Une autre manifestation de la tension superficielle se présente lorsqu'un jet d'eau commence avec une section elliptique: les forces de rappel élastiques tendent alors à le ramener à une section circulaire, mais le mouvement du liquide fait que la correction dépasse son but, et le jet s'applatit à angle droit, puis le phénomène recommence, etc... (Fig: 14). Je peux observer tous les matins aux toilettes.



fig. 12

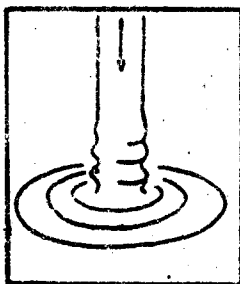


fig. 13

Concluons par une dernière expérience amusante: On peut non seulement déposer une goutte d'eau à la surface même d'un liquide sans que cette goutte disparaisse dans le liquide (Fig:15) J'ignore quelles sont les forces qui empêchent le contact - peut-être sont-elles d'origine électrique, les molécules d'eau, dissymétriques, présentant un alignement préférentiel au voisinage d'une surface libre (?), mais on peut encore inclure des gouttes dans des bulles d'air en les laissant tomber d'une hauteur de quelques centimètres sur la surface (Fig: 16). On pensera à ajouter de l'agent mouillant.

L'effet est particulièrement spectaculaire lorsqu'on fait tomber des gouttes colorées par une trace de permanganate dans de l'eau pure. Si, en plus, on a ajouté un peu de sel pour les léster, on peut alors parvenir à les faire flotter entre deux eaux et leur stabilité est remarquable.

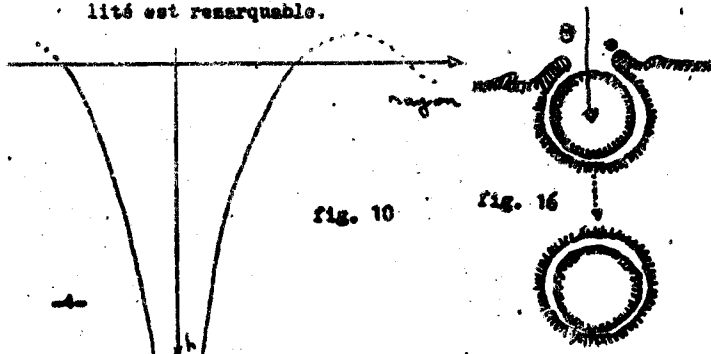


fig. 10

fig. 16

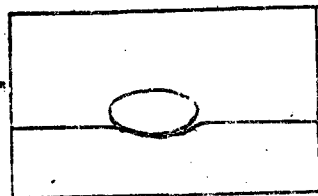


fig. 15