

FEUILLES VOLANTES
catalogue sur demande

Feuille CQ

auteur Roger Chartier

Dérivations... la Trigonométrie.

1- PERCEPTION DU PROBLÈME.

Considérons un pêcheur qui plonge son fil dans l'eau.
Quelle est la longueur du fil visible ? A quelle distance du bord plonge ce fil ?

Toutes les réponses évoluent entre les deux cas extrêmes:

- la gaulle est horizontale (fil visible pratiquement nul, distance égale à la longueur de la gaulle).

- la gaulle est verticale (fil pendant d'une même longueur, distance de ce fil au pêcheur nulle).

2- Pour simplifier - et ignorer la longueur vraie de la gaulle - on formulera les grandeurs envisagées (fil visible, distance de son "mouillage") par des rapports à la perche (a) constituée par la gaulle. On dira donc que, dans telle position, le fil visible vaut 0,5 perche, qu'il plonge à 0,1 perche.

3- L'ennui est qu'il n'y a pas de relation "simple" - arithmétique ou algébrique. Dans la pratique il a fallu "mesurer" une fois pour toutes ces rapports, puisqu'on ne peut les calculer (b). D'où les tables rapportant ces mesures dites lignes trigonométriques, car on verra plus loin qu'elles sont fertiles pour la résolution notamment des triangles (tri-gone, étymologiquement).

Le sinus est le nom du rapport "fil visible à perche", le cosinus (c), celui du rapport "distance de plongée / perche".

4- Il finit du paragraphe 2 on a amorcé "telle position". En effet la gaulle balaye, entre les deux positions extrêmes, un secteur de "rotation" où on se repérera par la mesure de l'angle qu'elle fait avec le sol (revoir géométrie de base). Plusieurs systèmes de mesure existent: le tour, le radian - ou trop mécanique, ou un peu théorique; surtout les degrés sexagésimaux (d) et les grades, centésimaux. Ce sont à eux que se réfèrent les instruments usuels, et c'est pour cette raison que la plupart des tables répertoires sont en degrés (minutes) ou en grades (centigrades).

5- Dans le plan, en général, tout cercle qui servira à des travaux "trigonométriques" sera ramené au cercle unité:

a) son rayon servira de base à tous les rapports.

b) on se fixera un rayon origine (horizontal à droite, par exemple, ou abscisses positives), départ de tout balayage.

c) on a choisi depuis... toujours un sens direct de rotation, c'est celui inverse de la marche des aiguilles d'une montre. (f).

(a) Ne pas oublier que la perche a été une unité de longueur.

(b) Par des méthodes usuelles.

(c) Ce rappelle que c'est la ligne qui vient aux côtés du pêcheur

(d) de soixante, car 60 minutes dans un degré, etc.

(e) c'est par ellipse donc incorrectement, qu'on dit le sens

des aiguilles; elles indiquent elles, le S-E, le N-E

(f) encore qu'au musée, on trouve des horloges qui marchaient à l'envers des nôtres! Pour les cavaliers ce sens revient à tourner à main gauche.

6- On rappelle que, dans une rotation, rien n'obligeant à s'arrêter, on peut, après retour à l'origine, ("fermeture" d'un tour) - circuit "bouclé"-repartir, et ceci plusieurs fois. C'est ce que les manuels précisent quand on dit qu'un angle (ou son arc) est défini à $2\pi R$ près, puisqu'une rotation vaut 2π (radian- le radian étant un nom latinisé du rayon, considéré comme une longueur.

7- On trouvera dans les manuels toutes les relations qu'on peut établir à partir du sinus et du cosinus, comme par exemple la tangente qui est leur quotient. Ces relations sont très nombreuses. On peut retrouver les plus courantes en remarquant les quelques données fondamentales suivantes.

8- Pythagore veut que ...

$$\sin^2 + \cos^2 = 1$$

Deux remarques

A. On pourrait "supprimer" l'une des lignes et écrire à la place de Cos, l'expression $\sqrt{1 - \sin^2}$. Ce serait peu commode. Ça sert pourtant dans les calculs.

B. $\sin^2$ de l'angle a ne doit pas être confondu avec le sin de l'angle a^2 qui s'écrit $\sin a^2$. ainsi, pour a valant 5 grades; $\sin^2 5 = (0,078)^2$ alors que $\sin (5)^2 = 0,383$.

9- On a introduit paragraphe 7, la tangente; rapport du sinus au cosinus. L'inversion des termes de la fraction donne la cotangente. Le nom de tangente s'explique très bien, grâce à Thalès. En effet, dressez une figure. Vous y verrez immédiatement l'égalité du rapport sinus/cosinus et de celui entre le segment de tangente (limitée entre le rayon-origine et le rayon délimitant l'angle à mesurer) et le rayon (qui, rappelons le, est pris comme unité, c'est à dire vaut 1 par définition).

10- D'autres lignes trigonométriques sont rencontrées moins fréquemment

A- Les inverses des précédentes.

1/cosinus s'appelle la sécante (nom dû à ce qu'elle coupe le cercle - voir figure- et va jusqu'à la tangente),

1/sinus devient dès lors la sécante.

-on a déjà vu (paragraphe 3) que tangente (abréviation tg) et cotangente (cotg) sont mutuellement inverses.

B- les compléments, (encore plus rare); La littérature anglo-saxonne utilise par exemple le cosinus versé (complément du cosinus au rayon origine - unité).

11- Arcs associés. Un sinus et le cosinus s'y rapportant peuvent avoir de plus certaines parentés, pour certains arcs (en paire) que l'on appelle dès lors arcs associés.

opérations ci-dessous entre arcs dont le résultat ci-contre	0	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	π (180°)
-	mêmes lignes	lignes alternées (avec signe - pour sinus)	lignes opposées
+	mêmes cosinus	lignes alternées	mêmes sinus

12- Valeurs remarquables d'Arcs.

on notera que

le sinus vaut	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
alias 0	alias $\frac{1}{2}$				(alias $\frac{1}{2}$)
quand l'arc vaut	0°	30°	45°	60°	90°

13- En faisant une figure, on voit immédiatement que les lignes résultant de l'addition d'arcs (g), sont le résultat d'opérations "complexes".

On peut essayer de les retenir ainsi.

Somme d'arcs : le cosinus est égal à :

ECART ENTRE PRODUITS (des cosinus, puis des sinus)

(le sinus est égal à la somme des produits invertis).

Différence d'arcs : le cosinus est égal à

SOMME des dits PRODUITS

(le sinus à l'écart entre les produits invertis).

Cela se démontre aisément (hors propos, ici,
voir manuels) et surtout se met en tableaux mnémo

14- Passage à la multiplication (h).

En considérant cos 2a comme le cosinus de (a+a), on arrive en vertu du paragraphe 13 ci-dessus à

$$\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$$

15- Inversement, l'égalité ci-dessus permet de descendre le degré d'une équation, puisque

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

16- Les opérations d'abaissement de degré (paragraphe 15) ou de passage de sommes à produits et inverse (paragraphe 13, 14), font que les lignes trigonométriques sont utilisées souvent comme "variables temporaires" dans des problèmes non obligatoirement géométriques.

Le fait que les valeurs SINUS (ou COSINUS) ne peuvent évoluer (au signe près) qu'entre 0 et 1 font aussi qu'on s'en sert dans des problèmes où ce cas est requis (calcul des probabilités, rapports statistiques...).

(g) Bien noter que c'est tout autre chose que la somme (ou la différence) des lignes elles-mêmes.

(h) On étendra sans difficulté le processus à la division d'arc.

7- On renverra aux manuels pour l'étude des graphiques des fonctions trigonométriques. C'est à cette occasion qu'apparaîtra le signe des grandeurs en cause - dont, délibérément, on n'a pas fait état jusqu'ici.

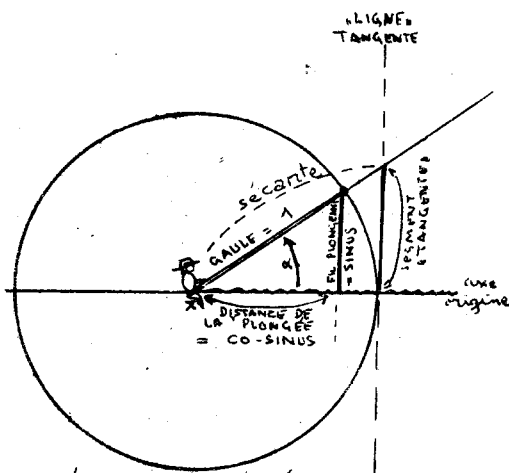
De même, aborder les dérivées trigonométriques dépasserait le cadre de cet entretien, et, là aussi on se reportera aux manuels si besoin est.

En conclusion, on incitera le lecteur à s'amuser à résoudre les problèmes donnés par tous les auteurs, basés sur le triangle, puisque, nous l'avons vu, la TRI-GONO-METRIE est essentiellement la MESURE de la figure aux trois angles.

On retrouvera aisément les formules voulues lorsqu'on se rappellera que, dans un triangle de côtés a, b, c (opposés aux angles A, B, C) on a fondamentalement :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

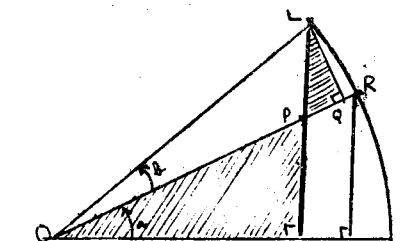
Pythagore n'en est d'ailleurs qu'un cas particulier (ou le cosinus est nul, puisqu'on prend $\hat{A}$ comme angle droit).



α = angle de levée
(rotation)

Pour THALES :

$$\frac{T_g}{1} = \frac{\sin}{\cos}$$



DÉMONSTRATION DE LA VALEUR
« SINUS SOMME » VIA THALES

LE SINUS CHERCHÉ EST $LM = \sin(\alpha + \beta)$

TROIS TRIANGLES SONT SEMBLABLES,
OPM', LPQ, et ORN. DONC.

$$\begin{array}{l|l|l} \frac{LP}{OR} = \frac{LQ}{ON} & \frac{PM}{OP} = \frac{RN}{OR} & \frac{PQ}{RN} = \frac{LQ}{ON} \\ \frac{LP}{1} = \frac{\sin \beta}{\cos \alpha} & PM = OP \cdot RN & PQ = \frac{RN \cdot LQ}{ON} \\ & = OP \cdot \sin \alpha & = \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha} \\ & = (\cos \beta - PQ) \sin \alpha & \\ & = \sin \alpha \cos \beta - \sin \alpha \cdot PQ & \\ & = \sin \alpha \cos \beta - \sin \alpha \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha} & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) = LM &= LP + PM \\ &= \frac{\sin \beta}{\cos \alpha} + \sin \alpha \cos \beta - \frac{\sin^2 \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha} \\ &= \frac{\sin \beta}{\cos \alpha} (1 - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha \cdot \cos \beta \\ &= \frac{\sin \beta \cdot \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} + \sin \alpha \cdot \cos \beta \end{aligned}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \beta \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \beta$$