

INITIATION A LA LOGIQUE

II

II LE CALCUL DES CLASSES

A. Définitions. Même tout à fait simple, une proposition se compose de plusieurs termes. C'est ainsi que la proposition traditionnelle "Socrate est mortel" comprend trois termes : Socrate / être / mortel. On appelle fonction propositionnelle une proposition dans laquelle un ou plusieurs termes sont remplacés par une variable. Par ex., dans la proposition ci-dessus, on peut remplacer Socrate par N, qui désigne alors n'importe quel être vivant et sujet à la mort ; on aura alors : "N est mortel".

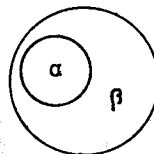
L'ensemble des propositions représentées par une fonction propositionnelle est appelée une classe. Les classes peuvent, à leur tour, être combinées entre elles. C'est ce qui fait l'objet de cette deuxième partie de la logique.

Mais auparavant, il faut encore définir la notion d'appartenance. Celle-ci exprime le fait qu'un individu ou un objet fait partie d'une classe. Ce rapport est symbolisé par la lettre grecque ϵ , tandis que les classes sont figurées par d'autres lettres grecques. La proposition "n est un élément de la classe α " sera donc symbolisée comme suit : $n \epsilon \alpha$.

Il est à remarquer que la notion d'appartenance ne s'applique pas aux classes de classes.

B. Relations entre classes. Il y a plusieurs types de relations entre les classes. Les trois principales sont les suivantes : toute la classe α est incluse dans la classe β ; quelques éléments de la classe α font partie aussi de β ; aucun élément de α ne fait partie de β . Le mathématicien Euler a figuré ces rapports par des cercles, ce qui aide à leur compréhension. Reprenons-les un à un.

1. Toute la classe α est contenue dans la classe β :

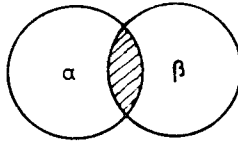


On symbolise cette relation comme ceci : $\alpha \subset \beta$. Cette relation est dite transitive ; c'est-à-dire que si Montpellier est dans l'Hérault et que l'Hérault soit en France, on peut en déduire que Montpellier est en France.

Ce premier rapport peut donc être symbolisé par la formule :

$$\boxed{\alpha \subset \beta} \equiv \boxed{n \epsilon \alpha} \supset \boxed{n \epsilon \beta}$$

2. Quelques éléments de la classe α se retrouvent dans la classe β :

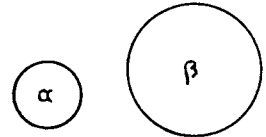


Dans cette deuxième relation, on appelle la partie commune, hachurée dans la figure ci-dessus, le "produit logique" des deux classes, et l'ensemble des termes composant celles-ci leur "somme logique". Ce produit est symbolisé par le signe $\cap$, cette somme par le signe $\cup$. On en déduit :

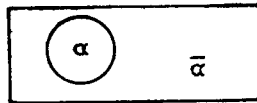
Produit : $\boxed{n \varepsilon . \alpha \cap \beta} \equiv \boxed{n \varepsilon \alpha . n \varepsilon \beta}$ (c'est à dire : n appartient à la fois à α et à β).

Somme : $\boxed{n \varepsilon . \alpha \cup \beta} \equiv \boxed{n \varepsilon \alpha \vee . n \varepsilon \beta}$ (c'est à dire : n appartient, soit à α , soit à β).

3. Aucun élément d' α ne se rencontre dans β :



Pour comprendre ce rapport, il faut d'abord définir la notion de "négation" d'une classe : on entend par là tous les éléments qui n'appartiennent pas à cette classe, ce qu'Euler a figuré comme suit :



Le syntème $\bar{\alpha}$ représente la négation de la classe α . Pour symboliser cette négation, on emploie la formule : $\boxed{n \varepsilon \bar{\alpha}} \equiv \boxed{\bar{n} \varepsilon \alpha}$

Cette troisième relation entre classes peut donc être définie par la formule suivante : $\alpha \bar{C} \beta$

Et elle peut être symbolisée ainsi : $\boxed{\alpha \bar{C} \beta} \supset \boxed{\beta \bar{C} \bar{\alpha}}$

4. Le syllogisme est également un rapport entre classes. On peut le symboliser comme suit $\boxed{\beta \bar{C} \gamma \& \alpha \bar{C} \beta} \supset \boxed{\alpha \bar{C} \gamma}$. C'est, au fond, une variante de la première des relations vues ci-dessus.

Ces relations permettent toute une série d'autres raisonnements encore, mais ceux-ci n'ont pas leur place dans cette étude sommaire, non plus que ce chapitre si curieux de la logique que sont les "paradoxes", dont voici l'exemple classique : Dans un village, tous ceux des habitants qui ne se rasent pas eux-mêmes sont rasés par le barbier ; le barbier lui-même appartient-il à la classe de ceux qui sont rasés par le barbier ou à celle de ceux qui se rasent eux-mêmes ? On n'en sort qu'en faisant exception pour le barbier.

Comme l'a écrit Edmond Schérer dans sa "Philosophie de l'Histoire", "le hasard est l'ignorance où nous sommes d'une cause, le fait qui nous échappe". Dans un sens, en effet, le hasard en soi n'existe pas. Ce n'est, en tout cas, pas une notion rationnelle. Aussi, les philosophes contemporains préfèrent-ils l'enserrer dans une méthode rigoureuse : celle des probabilités, qui, lorsque nous ignorons les causes d'un phénomène, lui-même cependant bien connu, combine notre connaissance et notre ignorance, nous permettant ainsi, bien souvent, de réduire celle-ci au point même parfois d'arriver à de nouvelles certitudes.

Le calcul des probabilités, qui utilise le raisonnement mathématique, se différencie profondément de la théorie des propositions et de celle des classes, car ces dernières théories permettent, à partir de données certaines, d'arriver à des conclusions également certaines, tandis que la théorie des probabilités - comme d'ailleurs le raisonnement dialectique - ne permet qu'exceptionnellement d'aboutir à pareil résultat : généralement, les conclusions seront moins certaines que les prémisses, il restera un certain degré d'indétermination, et il ne sera possible d'établir que le degré de cette certitude ou de cette incertitude.

Cette catégorie de raisonnement logique est basée essentiellement sur l'hypothèse qu'avant d'être réalisé, un événement futur possède la propriété de pouvoir se produire de plusieurs manières possibles, les divers "cas possibles" étant incompatibles entre eux.

Pour pouvoir appliquer ce genre de raisonnement logique, il faut donc tout d'abord s'assurer, comme l'a fort pertinemment souligné Pierre Vendryes dans son essai "Déterminisme et autonomie", qu'entre les éléments qu'on rapproche il peut s'établir des relations d'un certain genre, auxquelles il donne le nom de "relations aléatoires" : "Par définition", écrit-il, "je dirai qu'entre des systèmes naturels, les relations sont aléatoires lorsqu'elles peuvent se réaliser de plusieurs manières possibles. Ces différentes manières sont incompatibles entre elles, c'est à dire que la réalisation de l'une d'elles exclut toutes les autres. A chacune d'elles est affecté un certain coefficient de probabilité".

Ajoutons que les relations dites déterminées sont un cas particulier des relations aléatoires, en ce sens que, pour elles, le nombre des cas possibles se réduit, soit à l'unité : la relation est alors certaine ; soit à zéro : la relation est alors certainement impossible.

Le problème est donc de discerner, parmi les relations entre divers événements, lesquelles sont aléatoires, lesquelles sont déterminées, et, parmi les premières, dans quelle mesure elles sont aléatoires : c'est ici qu'interviennent les mathématiques, lesquelles tombent en dehors de notre sujet.

IV LA DIALECTIQUE :

Le raisonnement dialectique consiste, lorsqu'on se trouve en présence de deux idées ou de deux propositions contradictoires, également possibles, qu'on appelle alors l'une la thèse et l'autre l'antithèse, à trouver le moyen de les concilier dans ce qu'on appelle la synthèse.

C'est ainsi que Hegel, qui a établi les principes de ce genre de raisonnement (mais celui-ci était connu déjà depuis bien longtemps avant lui) base toute sa logique sur le principe de l'être ; l'antithèse de l'être étant le non-être, la synthèse de l'être et du non être est, dit Hegel, le devenir.

Mais, s'il est habituellement assez facile de dégager la synthèse de deux idées antagonistes simples, il en va autrement quand on a affaire à des propositions complexes. En pareil cas, même, les possibilités de réaliser la conciliation, la synthèse, entre elles sont théoriquement multiples. C'est ainsi qu'en pratique, lorsque deux adversaires se trouvent en présence et qu'ils sont dans l'obligation de s'accorder, chacun mettra, comme on dit, "de l'eau dans son vin" ; mais la proportion d'"eau" et de "vin" pourra varier théoriquement de 0,1 % à 99,9 %.

Cependant, en bonne logique, il n'y aura généralement qu'une seule ou qu'un petit nombre de synthèses possibles. L'art du dialecticien sera de trouver la synthèse parfaite, c'est à dire le point d'équilibre idéal entre la thèse et l'antithèse, et d'approcher ainsi au plus près la vérité.

© LES PRISMES 1965

CCP : 988-04 av. Maréchal Leclerc
34 Montpellier

Tél : (67) 72. 32. 04