

Initiation à
LA LOGIQUE

I

OBJET ET SUBDIVISIONS DE LA LOGIQUE

La logique est la branche de la philosophie qui enseigne à distinguer les raisonnements vrais des raisonnements faux.

Par elle-même elle ne permet pas d'arriver à des vérités nouvelles, elle permet seulement, à partir de vérités vérifiées d'une autre façon de tirer des conclusions correctes de ces vérités.

La logique se présente actuellement sous quatre aspects :

- 1° La combinaison des propositions ;
- 2° Le calcul des classes ;
- 3° Les probabilités ;
- 4° La dialectique.

Le premier de ces aspects sera décrit dans la présente feuille, le reste le sera dans une autre feuille.

I - LA COMBINAISON DES PROPOSITIONS.

A - Définition. Qu'est ce qu'une proposition ? "Une proposition est un énoncé verbal susceptible d'être vrai ou faux ; et, par extension, énoncé algorithmique équivalent à un énoncé de ce genre, par exemple, $a = b$ " (Lalande) . L'énonciation d'un nom isolé, un souhait, un ordre, une exclamation, etc. qui ne peuvent être vrais ou faux, ne sont pas des propositions et n'entrent pas dans le domaine de la logique.

B - Principes de base. On peut en énoncer beaucoup, tous équivalents entre eux. La tradition n'en retient que trois, d'où découlent d'ailleurs tous les autres.

1° Suivant l'axiome (ou principe) d'identité, toute proposition est équivalente à elle-même. L'affirmation d'équivalence étant symbolisée par le signe $\equiv$ et les propositions par des lettres, on peut représenter ce principe par : $a \equiv a$.

2° Suivant l'axiome (ou principe) du tiers exclu, une proposition donnée est vraie ou bien elle est fausse : il n'y a pas de tierce possibilité. Ce principe peut être symbolisé comme suit : $a \vee \bar{a}$. Le signe $\vee$ marque l'exclusion et se lit "exclut". Le signe $\neg$ surmontant le symbole de la proposition considérée, indique la négation.

Une application remarquable de ce principe est le raisonnement "a contrario" ou par l'absurde : On commence par démontrer que la négation d'une proposition est impossible ou qu'elle conduit à des conséquences absurdes ; on en déduit, puisqu'il n'y a pas de troisième ter-

me possible, que la proposition elle-même est vraie.

3° Suivant l'axiome (ou principe) de contradiction, qu'on appelle aussi de non contradiction, une proposition et sa négation ne peuvent être à la fois vraies ou à la fois fausses : "Se contredire c'est ne rien dire" a dit excellemment L. Dodin, qui propose comme symbole $(a \wedge b) \wedge (a \equiv b)$.

Mais, pour que ces principes puissent s'appliquer correctement, il faut que certaines conditions soient remplies :

1° - Il faut que la proposition considérée soit simple : les principes ci-dessus ne peuvent s'appliquer à des propositions complexes, c'est-à-dire se composant en réalité de plusieurs propositions : il faudra, le cas échéant, isoler chacune des propositions élémentaires et les examiner séparément ;

2° - Il faut que chaque terme de la proposition soit bien défini et exempt d'ambiguïté. Si on emploie le mot "terre" par exemple, il faudra préciser si on entend par là une certaine roche (argile, par exemple) ou bien la planète Terre ou une autre acception de ce mot ;

3° - Le même fait doit être considéré dans les mêmes conditions de temps et de lieu : une proposition peut être vraie ici et fausse ailleurs, vraie aujourd'hui et fausse demain, etc.

C - Les opérations logiques. Une forme simple de raisonnement consiste à combiner deux ou plusieurs propositions en établissant entre elles certains rapports, que les logiciens réduisent à quatre types principaux : la coordination, la disjonction, l'implication, l'équivalence.

a - La coordination encore appelée "produit logique" se caractérise par la conjonction et. La coordination de la proposition p et de la proposition q est donc p et q. Nous symboliserons cette opération comme suit : p & q.

Exemple : Jules est bossu et il fait beau.

b - La disjonction ou "somme logique" se caractérise par la conjonction ou, soit donc : p ou q. Elle est symbolisée comme suit : p v q.

Exemple : Cet objet est un peigne ou un râteau.

c - L'implication ou "condition" se caractérise par la conjonction si. Elle peut s'énoncer comme suit : si on a p, on a q, ou encore p implique q, qu'on symbolise habituellement : $p \supset q$. On emploie aussi parfois d'autres signes : $p \rightarrow q$, $p \Rightarrow q$. C'est là affaire de convention : nous nous en tiendrons au signe $\supset$;

d - L'affirmation d'équivalence ne se caractérise pas par une conjonction particulière ; elle consiste à affirmer que telle proposition a le même sens, la même valeur, que telle autre, que ces deux propositions énoncent donc la même chose sous une autre forme. Elle peut être énoncée p vaut q, et symbolisée : p $\equiv$ q.

Exemple : Deux plus deux font quatre est équivalent à trois plus un font quatre.

D - Relations entre propositions. Ces opérations logiques vont nous permettre, à partir de propositions simples, de déterminer la vérité de propositions complexes.

1. La coordination et la disjonction.

Les cas de vérité et d'erreur dans ces deux relations sont faciles à établir. La relation $p \text{ \& } q$ ne sera vraie que si p et q sont vrais tous les deux ; dans les trois autres cas, elle est fausse. La relation $p \text{ \vee } q$ sera vraie si p ou q ou les deux sont vrais ; elle ne sera fausse que si p et q sont faux tous les deux.

2. L'implication

L'évidence est moins immédiate. Partons d'un exemple : "Si Jean est un homme, Jean est mortel". Remplaçons, dans cette proposition, Jean par N et donnons à N diverses autres significations. Nous aurons le tableau suivant :

	N est un homme	$\supset$	N est mortel
Remplaçons N par Paul :	Vrai		Vrai
par un âne :	Faux		Vrai
par un caillou :	Faux		Faux
il reste le cas :	Vrai		Faux

Ce dernier cas, ne peut se produire. La vérité ne peut donc impliquer l'erreur, tandis que, fait remarquable, de l'erreur peut parfois sortir une vérité.

Conclusion : une implication $p \supset q$, est fausse si p est vrai tandis que q est faux ; elle vraie dans les trois autres cas.

3. L'équivalence

Deux propositions équivalentes sont deux propositions telles qu'elles peuvent être remplacées l'une par l'autre sans que le sens soit modifié. Il en résulte que la relation d'équivalence $p \equiv q$ sera vraie si p et q sont vrais tous les deux ou sont faux tous les deux, fausse si p est vrai et q faux ou le contraire.

4. Combinaison avec des propositions négatives.

Jusqu'ici, nous n'avons envisagé que des propositions, non seulement simples, mais aussi positives. Nous allons travailler maintenant aussi avec des propositions négatives, ce qui va nous amener à de nouvelles conclusions.

Combinons d'abord une disjonction et une implication. Nous connaissons les cas où ces deux relations sont vraies et ceux où elles sont fausses.

Récapitulons ces cas dans le tableau suivant :

	$p \text{ \vee } q$	$p \supset q$	
vérité	vrai vrai	vrai vrai	vérité
	vrai faux	faux vrai	
	faux vrai	faux faux	
erreur	faux faux	vrai faux	erreur

Si, dans l'implication, nous changeons p en $\bar{p}$, le tableau change et devient celui qui figure ci-dessous, car nous savons, d'après le

principe de non contradiction, que si p est vrai, $\bar{p}$ est faux, et réciproquement :

	$p \vee q$	$\bar{p} \supset q$	
vérité	vrai vrai	faux vrai	vérité
	vrai faux	vrai vrai	
	faux vrai	vrai faux	
erreur	faux faux	faux faux	erreur

Dans ce dernier tableau, les cas de vérité et les cas d'erreur sont les mêmes. On peut donc écrire : $[p \vee q] \equiv [\bar{p} \supset q]$. En reprenant l'exemple déjà donné ci-dessus on peut donc dire : "Cet objet est un peigne ou un rateau" c'est identiquement la même chose que : "si cet objet n'est pas un peigne, c'est un rateau". Il se peut que l'objet en question puisse servir indifféremment de peigne ou de rateau : dans ce cas la proposition reste vraie sous ses deux formes ; mais si l'objet n'est, ni un peigne ni un rateau, elle est de même fausse dans les deux cas

On démontrerait de même, mais la place nous manque pour développer ces démonstrations, que :

$$\begin{array}{lcl}
 [p \supset q] & \equiv & [\bar{p} \vee q] \\
 [p \supset \bar{q}] & \supset & [q \supset \bar{p}] \\
 [p \equiv q] & \equiv & [p \supset q] \text{ \& } [\bar{q} \vee p] \\
 [p \equiv q] & \equiv & [\bar{p} \vee q] \text{ \& } [\bar{q} \vee p] \\
 [p \equiv q] & \equiv & [p \text{ \& } q] \vee [\bar{p} \text{ \& } \bar{q}]
 \end{array}$$

Nous ne pouvons non plus nous étendre sur les conclusions qu'il est possible de tirer de ces équations logiques.

© LES PRISMES 1965

CCP : 988-04

tél (67) 72 32 04

av. Maréchal Leclerc
34 Montpellier